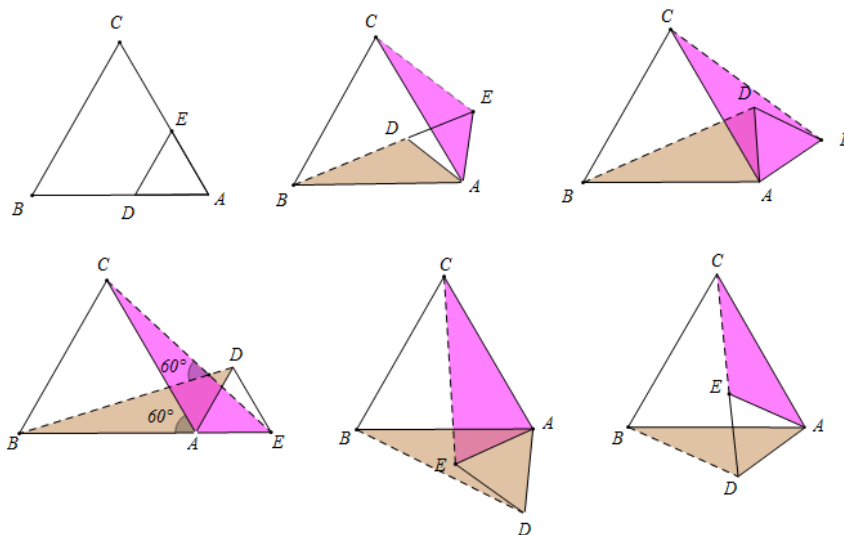


第2讲手拉手模型

一、等边三角形手拉手

锦囊妙计

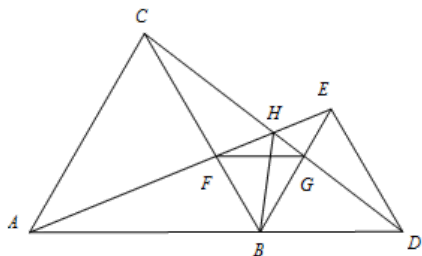
【常见图形】



$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，由A点引发了两个 共顶点 的等边三角形，大手 $AB = AC$ ，小手 $AD = AE$ ，大手拉小手，通过 "SAS" 可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

【结论】：无论旋转多少度， $BD = CE$ ， BD 、 CE 所形成的锐角夹角为 60° 。求 BD 、 CE 所形成的夹角，是利用 "8" 字形倒角。

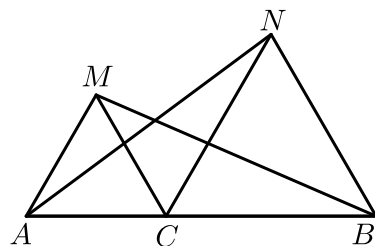
$\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 均为等边三角形， ABD 三点共线。



- (1) $\triangle ABE \cong \triangle CBD$;
- (2) $AE = CD$;
- (3) $\angle CHA = 60^\circ$;
- (4) $\triangle ABF \cong \triangle CBG$;
- (5) $AF = CG$;

- (6) $\triangle DBG \cong \triangle EBF$;
- (7) $FE = GD$;
- (8) $\triangle FBG$ 为等边三角形;
- (9) $FG \parallel AD$;
- (10) HB 平分 $\angle AHD$ 。

1. 如图， C 在线段 AB 上，在 AB 同侧作等边三角形 $\triangle ACM$ 和 $\triangle BCN$ ，连接 AN ， BM ，若 $\angle MBA = 22^\circ$ ，则 $\angle ANB =$ _____ 。



【答案】 82°

【解析】 $\because \triangle ACM$ 和 $\triangle BCN$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = MC, CB = CN, \angle ACM + \angle MCN = \angle BCN + \angle MCN,$$

$$\text{即} \angle ACN = \angle MCB,$$

$$\therefore \begin{cases} AC = MC \\ \angle ACN = \angle MCB \\ CN = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACN \cong \triangle MCB (\text{SAS}).$$

$$\therefore \angle ANC = \angle MBA$$

$$\because \angle MBA = 22^\circ,$$

$$\therefore \angle ANC = 22^\circ$$

$$\therefore \angle ANB = 22^\circ + 60^\circ = 82^\circ$$

故答案为： 82° 。

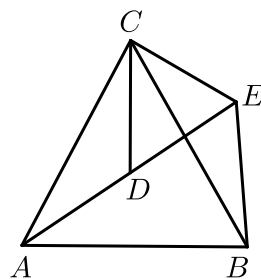
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】SAS

2. 如图， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A 、 D 、 E 在同一条直线上，连接 BE ，则 $\angle AEB$ 的度数是（ ）。



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】 C

【解析】 $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE,$$

$$\text{在} \triangle ACD \text{和} \triangle BCE \text{中}, \begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC,$$

$$\because \angle ADC + \angle CDE = 180^\circ, \angle CDE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 120^\circ,$$

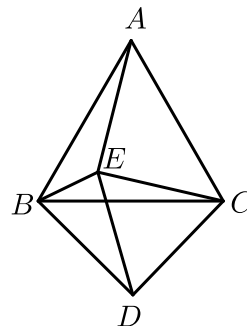
$$\therefore \angle BEC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

3. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且 $\angle EBD = 65^\circ$ ，则 $\angle AEB$ 的度数是（ ）.



A. 115°

B. 120°

C. 125°

D. 130°

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle BAC = 60^\circ, \angle ACB = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle ECB = \angle ECD - \angle ECB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle EBD = 65^\circ,$$

$$\therefore 65^\circ - \angle EBC = 60^\circ - \angle BAE,$$

$$\therefore 65^\circ - (60^\circ - \angle ABE) = 60^\circ - \angle BAE,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BAE = 55^\circ,$$

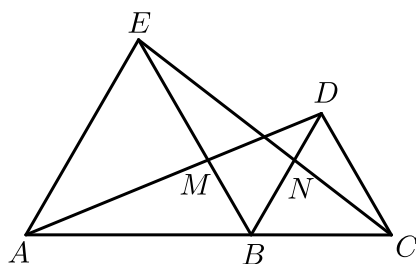
$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAE) = 125^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

栗子2

4. 如图，已知等边 $\triangle AEB$ 和等边 $\triangle BDC$ 在线段 AC 同侧，则下面错误的是（ ）.



- A. $\triangle ABD \cong \triangle EBC$ B. $\triangle NBC \cong \triangle MBD$ C. $DM = DC$ D. $\angle ABD = \angle EBC$

【答案】C

【解析】A 选项：可以利用SAS验证，正确；

B 选项：可以利用AAS验证，正确；

C 选项：可证 $\angle MBN = 60^\circ$ ，若 $DM = DC = DB$ ，则 $\triangle DMB$ 为等边三角形，即 $\angle BDM = 60^\circ$ 。

$$\therefore \angle EAB = \angle DBC,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BDM = 60^\circ.$$

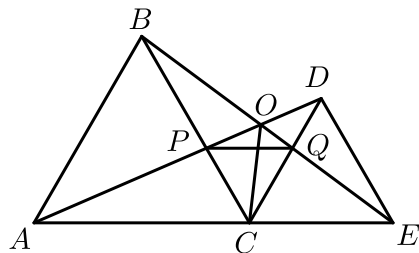
与已知不符，错误；

D 选项：可由 $\angle ABE = \angle DBC$ ，两边同时加一个 $\angle DBE$ 得到，正确。

故选 C。

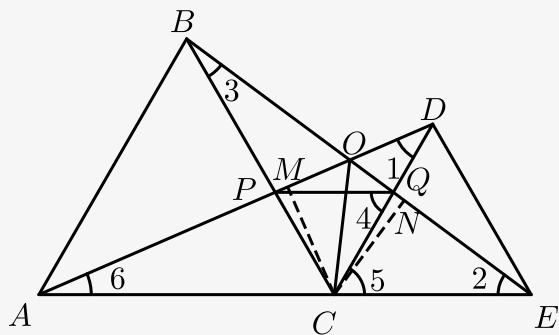
【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

5. 如图， C 为线段 AE 上一动点（不与点 A 、 E 重合），在 AE 同侧分别作正三角形 ABC 和正三角形 CDE ， AD 与 BE 交于点 O ， AD 与 BC 交于点 P ， BE 与 CD 交于点 Q ，连结 PQ ，以下六个结论：
 ① $AD = BE$ ；② $PQ \parallel AE$ ；③ $AP = BQ$ ；④ $DE = DP$ ；⑤ $\angle AOB = 60^\circ$ ；⑥ CO 平分 $\angle AOE$ ，
 恒成立的结论有 _____（把你认为正确的序号都填上）。



【答案】 ①②③⑤⑥

【解析】 如图：



$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为正三角形，

$$\therefore BC = AC, DE = DC = CE, \angle DEC = \angle BCA = \angle 5 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE.$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)},$$

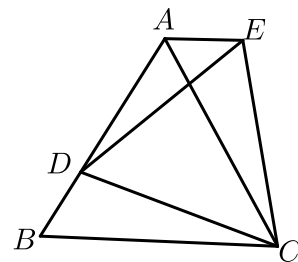
$\therefore AD = BE$, ①正确 ,
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle 6 = \angle 3$,
 易得 $\triangle CDP \cong \triangle CEQ$,
 $\therefore CP = CQ$, $DP = EQ$, $CD = CE$,
 $\therefore \angle PCQ = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle CPQ$ 为等边三角形 ,
 $\therefore \angle 4 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle 5 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle 4 = \angle 5$, $PQ \parallel AE$, ②正确 ,
 $\therefore AD = BE$, $DP = EQ$,
 $\therefore AD - DP = BE - EQ$,
 $\therefore AP = BQ$, ③正确 ,
 $\therefore DP = EQ \neq DE$,
 $\therefore$ ④不正确 ,
 $\therefore \angle AOB = \angle 2 + \angle 6$,
 $\therefore \angle AOB = \angle 2 + \angle 3$,
 $\therefore \angle ACB = \angle 2 + \angle 3 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle AOB = 60^\circ$,
 $\therefore$ ⑤正确 ,
 过点 C 作 $CM \perp AD$ 于 M , $CN \perp BE$ 于 N ,
 在 $\triangle BCN$ 和 $\triangle ACM$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle BNC = \angle AMC = 90^\circ \\ \angle 3 = \angle 6 \\ BC = AC \end{cases} ,$$
 $\therefore \triangle BCN \cong \triangle ACM (\text{AAS})$,
 $\therefore CN = CM$
 又 $\therefore CM \perp AD$, $CN \perp BE$,
 $\therefore CO$ 平分 $\angle AOE$,
 $\therefore$ ⑥正确 .

【标注】【知识点】全等三角形实际生活中的应用

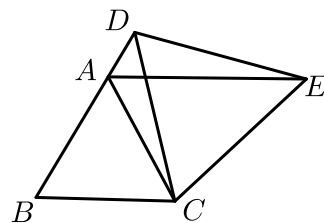
【知识点】SAS

6. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上动点，以 CD 为边，向上作等边 $\triangle EDC$ ，连接 AE 。



(1) 求证： $AE \parallel BC$ 。

(2) 若 D 点运动到 BA 延长线上，其它条件不变，是否仍有 $AE \parallel BC$ ？



【答案】(1) 证明见解析。

(2) 仍有 $EA \parallel BC$ 。

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 、 $\triangle EDC$ 均为等边三角形，

$$\therefore \angle BCA = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\text{且 } BC = AC, CD = CE,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

$\therefore$ 在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle EAC = \angle DBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACB,$$

$$\therefore EA \parallel BC.$$

(2) 同理可得： $\triangle BCD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$ ，

$$\therefore \angle BDC = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle B,$$

$$\therefore AE \parallel BC.$$

【标注】【能力】推理论证能力

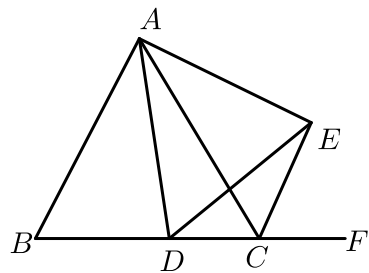
【知识点】全等三角形实际生活中的应用

【知识点】SAS

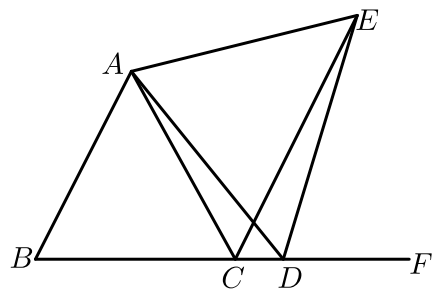
【知识点】平行线判定

7. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为直线 BC 上的一动点（点 D 不与 B 、 C 重合），以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$ （顶点 A 、 D 、 E 按逆时针方向排列），连接 CE 。

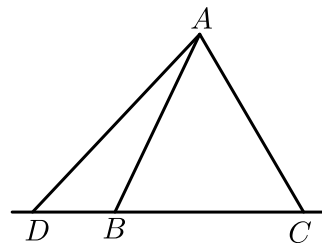
（1）如图，当点 D 在边 BC 上时，求证：① $BD = CE$ ；② $AC = CE + CD$ 。



（2）如图，当点 D 在边 BC 的延长线上且其他条件不变时，结论 $AC = CE + CD$ 是否成立？若不成立，请写出 AC 、 CE 、 CD 之间存在的数量关系，并说明理由。



（3）如图，当点 D 在边 BC 的反向延长线上且其他条件不变时，补全图形，并直接写出 AC 、 CE 、 CD 之间存在的数量关系。



【答案】（1）证明见解析。

（2）证明见解析。

（3）画图见解析。

【解析】（1） $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE.$$

$$\therefore BC = BD + CD, AC = BC,$$

$$\therefore AC = CE + CD.$$

(2) $AC = CE + CD$ 不成立,

$$AC、CE、CD\text{ 之间存在的数量关系是: } AC = CE - CD.$$

理由: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$$

$$\therefore BD = CE$$

$$\therefore CE - CD = BD - CD = BC = AC,$$

$$\therefore AC = CE - CD.$$

(3) 补全图形 (如图)

$$AC、CE、CD\text{ 之间存在数量关系是: } AC = CD - CE.$$

理由: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC - \angle BAE = \angle DAE - \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

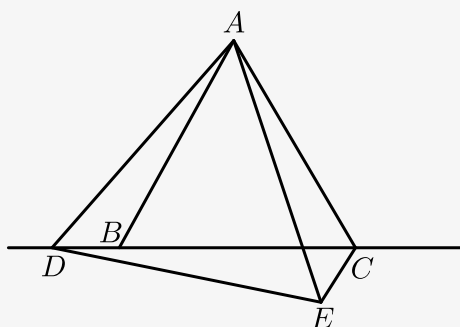
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$$

$$\therefore BD = CE.$$

$$\therefore BC = CD - BD,$$

$$\therefore BC = CD - CE,$$

$$\therefore AC = CD - CE.$$

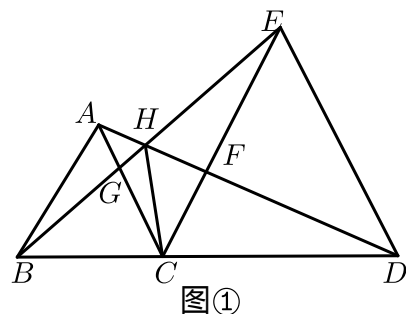


【标注】【知识点】动点与线段-无数轴

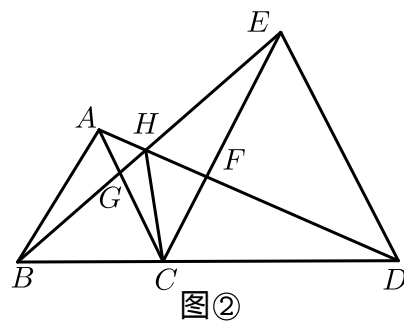
独步天下

8. 如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 均为等边三角形，并且 B, C, D 三点共线。

(1) 如图①，连接 FC ，求证： HC 平分 $\angle BHD$ 。



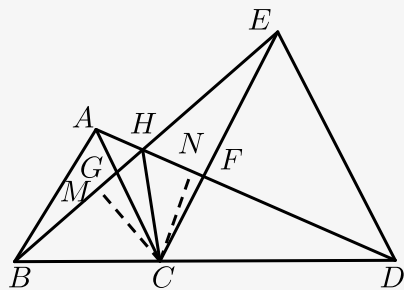
(2) 如图②，试探究 HD, HE, HC 之间的数量关系，并证明。



【答案】(1) 证明见解析。

(2) $HC + HE = HD$ ；证明见解析。

【解析】(1) 如图①，作 $CM \perp BE$ ，垂足为点 M ，作 $CN \perp AD$ ，垂足为点 N ，



图①

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，

$\therefore BC = AC, CE = CD, \angle BCA = \angle ECD = 60^\circ$,

$\therefore \angle BCA + \angle ACE = \angle ECD + \angle ACE$, 即 $\angle BCE = \angle ACD$,

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCE = \angle ACD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$ (SAS) ;

$\therefore AD = BE$, 且 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ACD}$,

$\therefore CM \perp AE, CN \perp BD$,

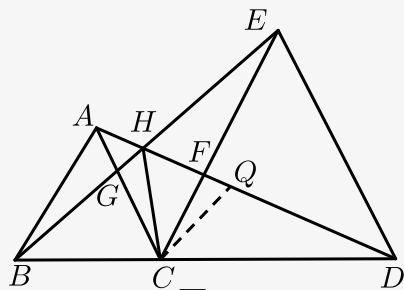
$$\therefore \frac{1}{2} \times BE \times CM = \frac{1}{2} \times AD \times CN,$$

$\therefore CM = CN$,

又 $\because CM \perp AE, CN \perp BD$,

$\therefore$ 点 C 在 $\angle BHD$ 的平分线上, 即 CH 平分 $\angle BHD$.

(2) 如图, 在 HD 上截取 $DQ = EH$, 连接 CQ ,



图②

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle CDQ = \angle CEH$,

又 $\because CD = CE$,

$\therefore \triangle CDQ \cong \triangle CEH$ (SAS) ,

$\therefore \angle DCQ = \angle ECH$, 且 $CQ = CH$,

又 $\because \angle DCQ + \angle ECQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle ECH + \angle ECQ = 60^\circ$, 即 $\angle HCQ = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CHQ$ 为等边三角形,

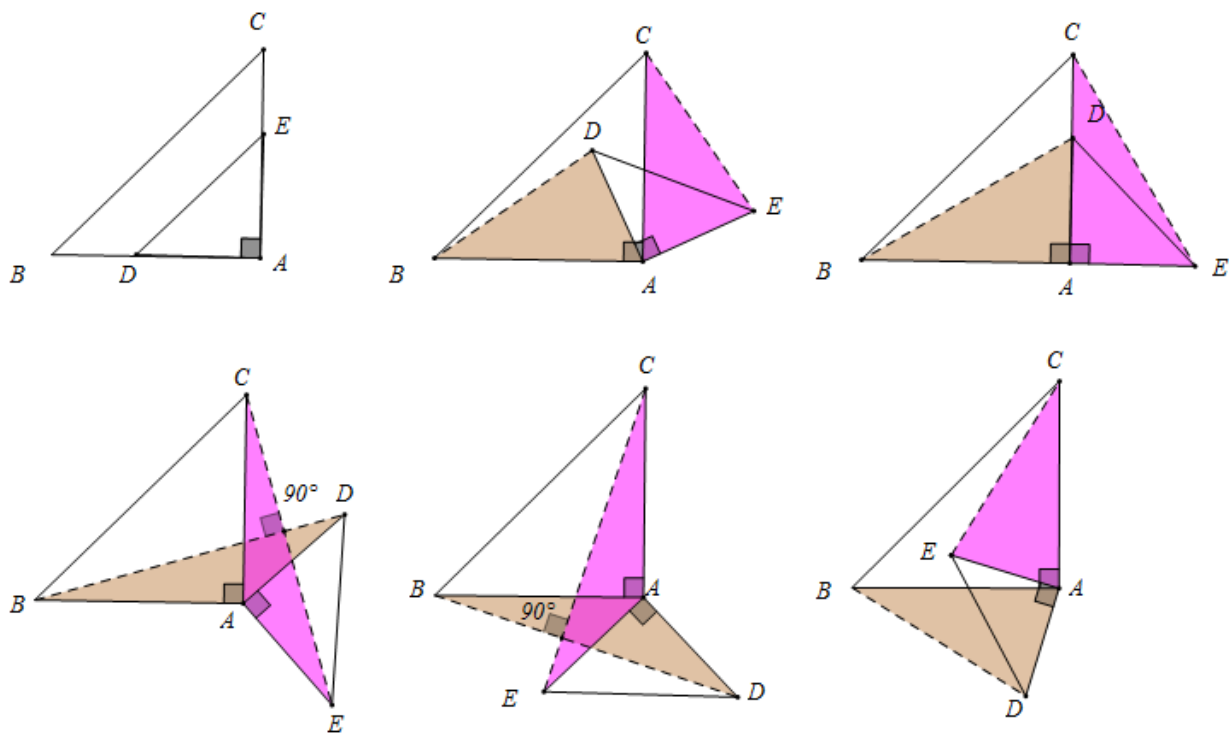
$$\begin{aligned}\therefore HQ &= HC, \\ \text{又} \because HQ + DQ &= HD, \\ \therefore HC + HE &= HD.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

二、等腰直角三角形手拉手

💡 锦囊妙计

【常见图形】



$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，

由A点引发了两个 **共顶点** 的等腰直角三角形，大手 **$AB = AC$** ，小手 **$AD = AE$** ，大手拉小手，通过 "**SAS**" 可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

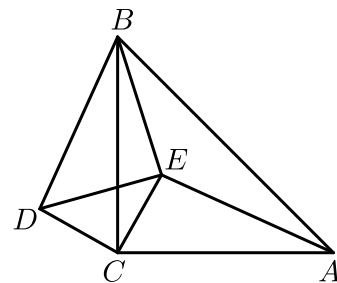
结论：无论旋转多少度 1. **$BD = CE$**

2. **BD 、 CE 所形成的夹角为 90°** 。

栗子4

9. 如图， $AC = BC$ ， $DC = EC$ ， $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$ ，且 $\angle EBD = 42^\circ$ ，则 $\angle AEB =$

_____。

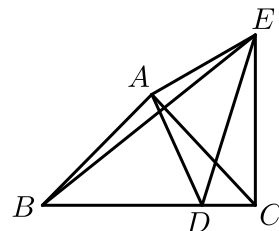


【答案】 132°

【解析】 $\because \triangle ACE \cong \triangle BDC$,
 $\therefore \angle EBD = \angle CBE + \angle EAC$,
 又 $\because \angle AEB = \angle EAC + \angle ACB + \angle CBE$,
 $\therefore \angle AEB = 132^\circ$.

【标注】 【知识点】 等腰直角三角形的手拉手模型

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，
 $S_{\triangle BDE} = 18$ ，则 $BD =$ _____ .



【答案】 6

【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE$,
 $\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$,
 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$,
 $\therefore BD = CE$, $\angle ABD = \angle ACE$,
 $\because \angle BAC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABD + \angle ACD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACE + \angle ACD = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ECD = 90^\circ, \\
&\therefore EC \perp BD, \\
&\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot CE = 18, \\
&\therefore BD = CE, \\
&\therefore \frac{1}{2} BD^2 = 18, \\
&\therefore BD = 6.
\end{aligned}$$

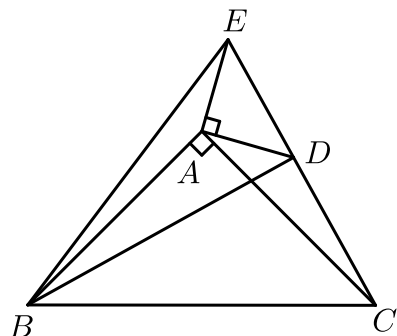
【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

栗子5

11. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。以下四个结论：

① $BD = CE$ ；② $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；③ $BD \perp CE$ ；④ $\angle BAE + \angle DAC = 180^\circ$ 。

其中结论正确的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】解：① $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$ ，即 $\angle BAD = \angle CAE$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中， $\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ ，本选项正确；

② $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ, \text{ 本选项正确;}$$

$$\textcircled{3} \because \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ,$$

则 $BD \perp CE$, 本选项正确;

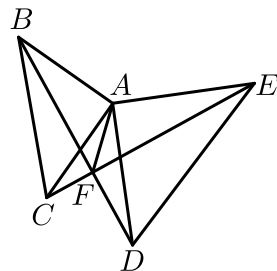
$$\textcircled{4} \because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle DAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ, \text{ 故此选项正确,}$$

故选: D.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

12. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, BD , CE 交于点 F , 连接 AF . 下列结论: ① $BD = CE$; ② $BF \perp CF$; ③ AF 平分 $\angle CAD$; ④ $\angle AFE = 45^\circ$. 其中正确结论的个数有 ().



A. 1个

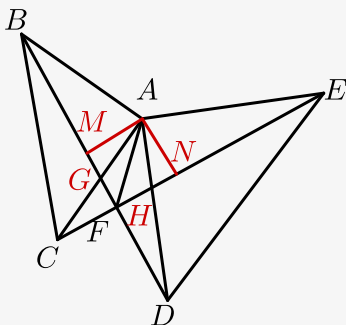
B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】



如图所示, 过点 A 分别作 $AM \perp BD$ 于点 M , $AN \perp CE$ 于点 N ,

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形,

$$\therefore AB = AC, AD = AE,$$

$$\text{又 } \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD, \angle CAE = \angle DAE + \angle CAD,$$

$$\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\text{在} \triangle BAD \text{与} \triangle CAE \text{中有} \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE, \text{故①正确.}$$

$$\angle BDA = \angle CEA,$$

$$\text{在} \triangle ADE \text{中有} \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEA + \angle CED + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED + \angle ADE + \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\text{在} \triangle DEF \text{中有} \angle EFD + \angle CED + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ, \text{即} BF \perp CF, \text{故②正确.}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore S_{\triangle BAD} = S_{\triangle CAE},$$

$$\text{又} S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} BD \times AM,$$

$$S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} CE \times AN, BD = CE,$$

$$\therefore AM = AN,$$

$$\text{又} AM \perp BD, AN \perp CE,$$

$$\therefore AF \text{平分} \angle BFE,$$

$$\text{又} \angle BFE = 180^\circ - \angle EFD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \frac{1}{2} \angle BFE = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ, \text{故④正确.}$$

如图所示, 设 AC 与 BD 交点为 G , AD 与 CE 交点为 H ,

$$\text{在} \triangle AFG \text{与} \triangle AFH \text{中有} AF = AF, \angle AFG = \angle AFH = 45^\circ,$$

而根据已知条件无法得到 $FG = FH$ 或 $AG = AH$, $GF = HF$, 则无法得到 $\triangle AFG$ 与 $\triangle AFH$ 全等, 无法得出 AF 平分 $\angle CAD$, 故③错误.

$\therefore$ 正确结论有①②④共3个.

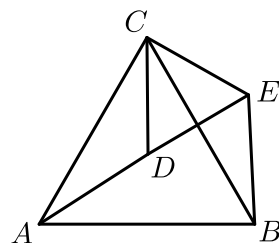
故选C.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

栗子6

13. 请回答下列各题:

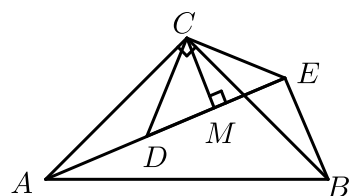
(1) 已知: 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一直线上, 连接 BE .



① $\angle AEB$ 的度数为 _____ .

② 线段 AD , BE 之间的数量关系为 _____ .

(2) 已知 : 如图 , $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形 , $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 A , D , E 在同一直线上 , CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高 , 连接 BE .



① 求 $\angle AEB$ 的度数 .

② 线段 AE 、 BE 、 CM 之间有怎样的数量关系 ? 并请你说明理由 .

【答案】 (1) ① 60°

② $AD = BE$

(2) ① 135° .

② $AE - BE = 2CM$.

【解析】 (1) ① $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形 ,

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ , AC = BC , DC = EC ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB , \text{ 即 } \angle ACD = \angle BCE ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中 ,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE , \\ DC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (SAS) ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC .$$

$\because$ 点 A , D , E 在同一直线上 ,

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle CDE = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle BEC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ .$$

② 由①得 , $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

$$\therefore AD = BE .$$

(2)① $\because \triangle DCE$ 是等腰直角三角形, CM 是中线,

$$\therefore CM = DM = EM = \frac{1}{2} DE ,$$

$$\angle CDE = \angle CED = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE .$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE , \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (SAS) ,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle CEB ,$$

$$\therefore \angle CDA = 180^\circ - \angle CDE = 135^\circ ,$$

② 由①得, $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

$$\therefore BE = AD .$$

$$\therefore AE - AD = DE = 2CM ,$$

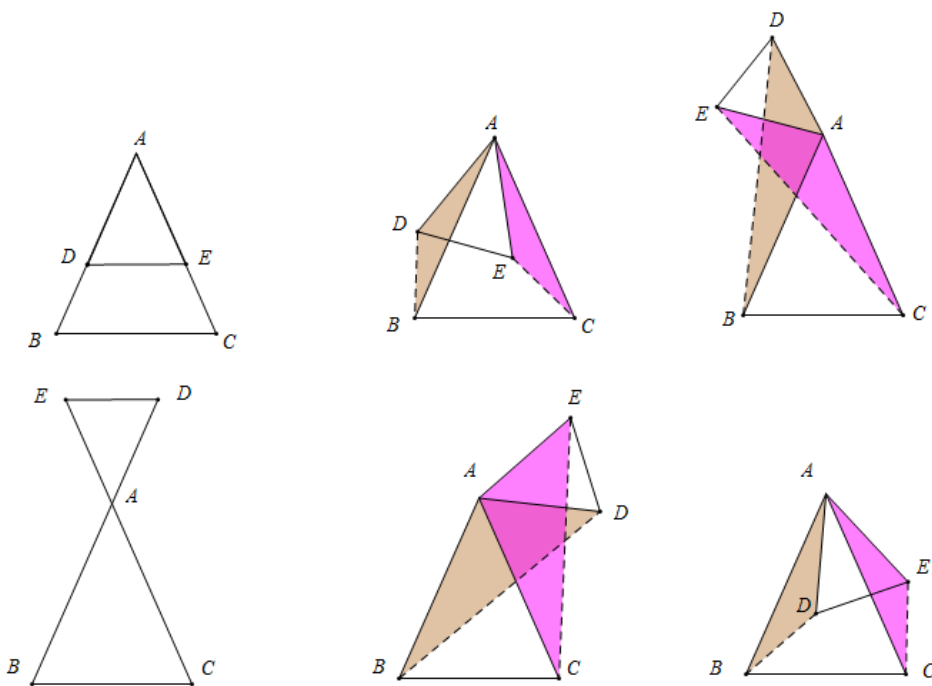
$$\therefore AE - BE = 2CM .$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

三、任意等腰三角形手拉手

 锦囊妙计

【常见图形】

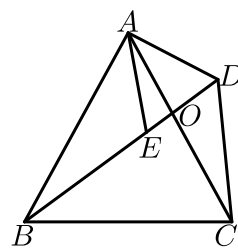


$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是相似的等腰三角形，由A点引发了两个 **共顶点** 的等腰三角形，大手 $AB=AC$ ，小手 $AD=AE$ ，大手拉小手，通过 “**SAS**” 可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

结论：无论旋转多少度， $BD=CE$ ， BD 、 CE 所形成的夹角有一角等于 $\angle BAC$ 。

栗子7

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点D是 $\triangle ABC$ 外一点，连接 AD ， BD ， CD ，且 BD 交 AC 于点O，在 BD 上取一点E，使得 $AE=AD$ ， $\angle EAD=\angle BAC$ ，若 $\angle ACB=70^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数为（ ）。



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【答案】 B

【解析】 $\because \angle EAD = \angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAC - \angle EAO = \angle EAD - \angle EAO,$$

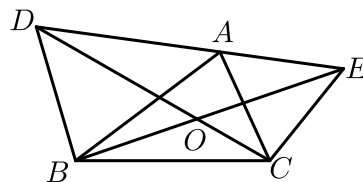
$$\therefore \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\because AB = AC, AE = AD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD \text{ (SAS)} , \\
&\therefore \angle ABE = \angle ACD , \\
&\therefore \angle AOB = \angle DOC , \\
&\therefore \angle BAC = \angle BDC , \\
&\therefore AB = AC , \angle ACB = 70^\circ , \\
&\therefore \angle BAC = \angle BDC = 40^\circ .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

15. 如图, $AB = AD$, $AC = AE$, $\angle DAB = \angle CAE = 52^\circ$, 则 $\angle BOC = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



【答案】128

【解析】 $\because \angle DAB = \angle CAE = 52^\circ$,
 $\therefore \angle DAB + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC$,
 $\therefore \angle DAC = \angle BAE$.
 在 $\triangle DAC$ 和 $\triangle BAE$ 中,

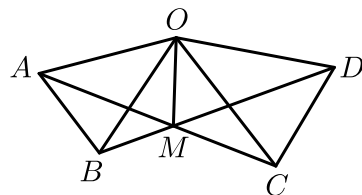
$$\begin{cases} OA = BA \\ \angle DAC = \angle BAE, \\ AC = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle DAC \cong \triangle BAE \text{ (SAS)} ,$
 $\therefore \angle DCA = \angle BAE$.
 设 OE 与 AC 交于 M ,
 $\therefore \angle AME = \angle OMC$, $\angle DCA = \angle BAE$,
 $\therefore \angle CAE = \angle EOC = 52^\circ$.
 $\therefore \angle BOC + \angle COE = 180^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = 180^\circ - 52^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = 128^\circ$.

【标注】【知识点】SAS

16. 如图，在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中， $OA = OB$ ， $OC = OD$ ， $OA < OC$ ， $\angle AOB = \angle COD = 36^\circ$ ，连接 AC 、 BD 交于点 M ，连接 OM ，下列结论：

① $\angle AMB = 36^\circ$ ；② $AC = BD$ ；③ OM 平分 $\angle AOD$ ；④ MO 平分 $\angle AMD$ ，其中正确的结论个数有（ ）个。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】 $\because \angle AOB = \angle COD = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC,$$

$$\text{即 } \angle AOC = \angle BOD,$$

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，

$$\begin{cases} OA = OB \\ \angle AOC = \angle BOD \\ OC = OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS}),$$

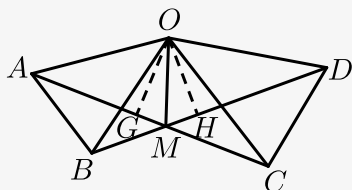
$$\therefore \angle OCA = \angle ODB, AC = BD, \text{②正确};$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OBD,$$

$$\text{由三角形的外角性质得: } \angle AMB + \angle OBD = \angle AOB + \angle OAC,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle AOB = 36^\circ, \text{①正确};$$

作 $OG \perp AC$ 于 G ， $OH \perp BD$ 于 H ，如图所示：



$$\text{则 } \angle OGC = \angle OHD = 90^\circ,$$

在 $\triangle OCG$ 和 $\triangle ODH$ 中，

$$\begin{cases} \angle OCA = \angle ODB \\ \angle OGC = \angle OHD \\ OC = OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCG \cong \triangle ODH (\text{AAS}),$$

$$\therefore OG = OH,$$

$$\therefore MO \text{ 平分 } \angle AMD, \text{④正确};$$

$\therefore \angle AOB = \angle COD$,
 $\therefore$ 当 $\angle DOM = \angle AOM$ 时 , OM 平分 $\angle BOC$,
 假设 $\angle DOM = \angle AOM$,
 $\therefore \angle AOB = \angle DOC$,
 $\therefore \angle COM = \angle BOM$,
 $\therefore MO$ 平分 $\angle AMD$,
 $\angle AMB = \angle PMC$,
 $\therefore \angle CMO = \angle BMO$,
 在 $\triangle COM$ 和 $\triangle BMO$ 中 ,

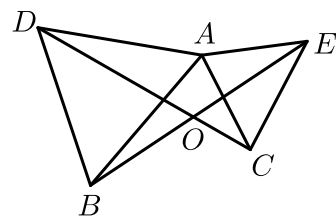
$$\begin{cases} \angle COM = \angle BOM \\ OM = OM \\ \angle CMO = \angle BMO \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle COM \cong \triangle BOM (ASA)$,
 $\therefore OB = OC$,
 $\therefore OA = OB$,
 $\therefore OA = OC$,
 与 $OA < OC$ 矛盾 ,
 $\therefore$ ③ 错误 ;
 正确的有 ①②④ .
 故选 C .

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

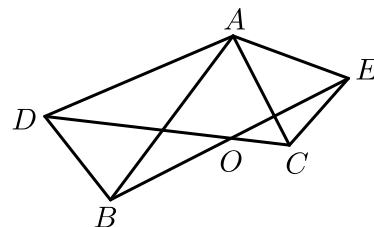
栗子9

17. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中 , $AD = AB$, $AC = AE$.

(1) 如图 , 若 $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$, 求证 : $BE = DC$.



(2) 如图 , 若 $\angle DAB = \angle CAE = n^\circ$, 求 $\angle DOB$ 的度数 .



【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) n° .

【解析】 (1) $\because \angle DAB = \angle CAE$,

$$\therefore \angle DAB + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC .$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAE ,$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle BAE , \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE ,$$

$$\therefore DC = BE .$$

(2) 同理得 : $\triangle ADC \cong \triangle ABE$,

$$\therefore \angle ADC = \angle ABE ,$$

$$\text{又} \because \angle DOB = 180^\circ - \angle ODB - \angle OBD$$

$$= 180^\circ - \angle ODB - \angle ABD - \angle ABE ,$$

$$\therefore \angle DOB = 180^\circ - \angle ODB - \angle ABD - \angle ADC$$

$$= 180^\circ - \angle ADB - \angle ABD ,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle DAB = n^\circ .$$

【标注】【知识点】 SAS

【知识点】 等边三角形与全等

【知识点】 等边三角形的性质

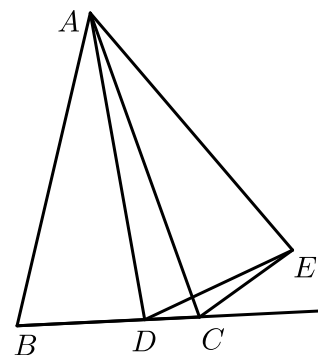
【知识点】 等腰三角形的性质-等边对等角

【能力】 推理论证能力

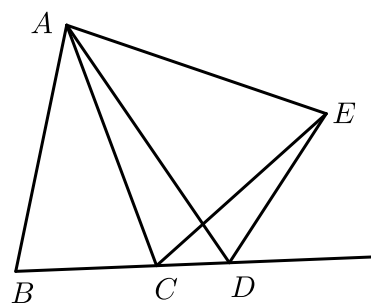
18. 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, D 是直线 BC 上的一点 , 以 AD 为一边在 AD 的右侧作 $\triangle ADE$, 使 $AE = AD$, $\angle DAE = \angle BAC$, 连接 CE , 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle DCE = \beta$.

(1) 如图 , 点 D 在线段 BC 上移动时 , 角 α 和 β 之间的数量关系是 : $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$.

证明上面 α 和 β 所满足的关系式 .



- (2) 如图，点 D 在线段 BC 的延长线上移动时，角 α 和 β 之间的数量关系会发生变化吗？若发生改变请写出新的关系式，并给出说明。



【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 发生改变， $\alpha = \beta$ 。证明见解析。

【解析】 (1) $\because \angle DAE = \angle BAC$

$$\therefore \angle DAE - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAD.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because \angle BAC + \angle ABD + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ACE + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BCE = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \beta = 180^\circ.$$

(2) $\because \angle DAE = \angle BAC,$

$$\therefore \angle DAE + \angle CAD = \angle BAC + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS).

$\therefore \angle ABD = \angle ACE, BD = CE,$

$\therefore \angle ACD = \angle ABD + \angle BAC = \angle ACE + \angle DCE,$

$\therefore \angle BAC = \angle DCE,$

$\therefore \alpha = \beta.$

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】SAS

【能力】推理论证能力

【方法】图象法